SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Sergio Polidoro

REGOLARITÀ HÖLDERIANA DELLE SOLUZIONI DEBOLI DI EQUAZIONI DI TIPO KOLMOGOROV-FOKKER-PLANK IN FORMA DI DIVERGENZA

8 febbraio 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. Abbiamo considerato il problema della regolarità delle soluzioni deboli della seguente equazione differenziale

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} \partial_{x_i}(a_{i,j}(z)\partial_{x_j}u) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = \sum_{j=1}^{m_0} \partial_{x_j}F_j(z),$$

dove $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, 0 < m_0 \leq N$ and $F_j \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ per $j = 1, \dots, m_0$.

I nostri principali risultati sono una stima a priori del tipo

$$\|\partial_{x_j}u\|_p \leq c\left(\sum_{k=1}^{m_0} \|F_k\|_p + \|u\|_p\right) \quad \text{per ogni } p > 1,$$

e per $j = 1, \dots, m_0$, e la regolarità hölderiana di u.

Abbiamo provato il primo risultato, supponendo che i coefficienti $a_{i,j}$ appartengano ad una opportuna classe VMO, utilizzando le tecniche introdotte da Chiarenza, Frasca e Longo in [4], per gli operatori ellittici in forma di non divergenza. Il secondo risultato è conseguenza del primo e di una formula di rappresentazione basata sulla espressione esplicita della soluzione fondamentale dell'operatore "congelato".

Abstract. In this note we are concerned with the interior regularity of the weak solutions of the second order differential equation

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} \partial_{x_i}(a_{i,j}(z)\partial_{x_j}u) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = \sum_{j=1}^{m_0} \partial_{x_j}F_j(z),$$

where $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, 0 < m_0 \leq N$ and $F_j \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ for $j = 1, \dots, m_0$.

Our main results are a local estimates like

$$\|\partial_{x_j}u\|_p \leq c\left(\sum_{k=1}^{m_0} \|F_k\|_p + \|u\|_p\right) \quad \text{for all } p > 1,$$

and for $j = 1, \dots, m_0$, and the Hölder continuity of u.

We proved the first result under a suitable VMO assumption on the coefficients $a_{i,j}$, by using the technique introduced by Chiarenza, Frasca and Longo in [4], for the elliptic operators in non-divergence form. The second result follows from the first one and from a representation formula based on the explicit fundamental solution of the "frozen" operator.

1 Introduzione

I risultati di questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con Maria Manfredini.

Abbiamo studiato il problema della regolarità hölderiana delle soluzioni deboli della seguente equazione differenziale

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m_0} \partial_{x_i}(a_{i,j}(z)\partial_{x_j}u) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = \sum_{j=1}^{m_0} \partial_{x_j}F_j(z), \tag{1.1}$$

dove $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, 0 < m_0 \leq N$ ed $F_j \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ per $j = 1, \dots, m_0$, supponendo verificata la seguente

IPOTESI H *La matrice* $A_0(z) = \left(a_{i,j}(z)\right)_{i,j=1,\dots,m_0}$ *è simmetrica ed esiste* $\mu > 0$ *tale che*

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \leq \langle A_0(z)\xi, \xi\rangle \leq \mu|\xi|^2$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ *e per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^{m_0}$.

Rispetto ad una opportuna base di $\mathbb{R}^N$ *la matrice* $B = \left(b_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,N}$ *assume la forma*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove ogni B_j *è un blocco* $m_{j-1} \times m_j$ *di rango* m_j, *per* $j = 1, 2, \dots, r$, *con* $m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$ *ed* $m_0 + m_1 + \dots + m_r = N$.

Per abbreviare le notazioni, scriveremo l'equazione (1.1) nel modo seguente

$$\operatorname{div}(A(z)Du) + Yu = \operatorname{div}(F),$$

dove $F = (F_1, \dots, F_{m_0}, 0, \dots, 0), Yu = \langle x, BDu\rangle - \partial_t u$ ed A è la matrice $N \times N$ definita da

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Inoltre indicheremo con Y^* l'aggiunto di Y ($Y^* = -Y$ in quanto $\operatorname{tr}(B) = 0$).

Diciamo che u è *soluzione debole* di (1.1) in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ se esiste $q > 1$ tale che $u, \partial_{x_1}u, \dots, \partial_{x_{m_0}}u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \langle A(z)Du(z), D\psi(z)\rangle dz - \int_\Omega u(z)Y^*\psi(z)dz = \int_\Omega \langle F(z), D\psi(z)\rangle dz$$

per ogni $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Enunciamo ora i principali risultati di questo seminario, per le notazioni precise rimandiamo al paragrafo 2.

TEOREMA 1.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia u soluzione debole in Ω dell'equazione*

$$\operatorname{div}(A(x,t)Du) + \langle x, BDu\rangle - \partial_t u = \operatorname{div}(F).$$

Supponiamo che l'operatore L verifichi l'Ipotesi H, che $a_{i,j} \in \mathrm{VMO}_L$ per $i,j = 1,\dots,m_0$ e che $u, F_j \in L^p(\Omega)$ per $j = 1,\dots,m_0$, con $p \in]1,\infty[$. Allora, per ogni $j = 1,\dots,m_0$ risulta $\partial_{x_j} u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante positiva c_1, che dipende solo da p, K, Ω e dall'operatore L, tale che

$$\|\partial_{x_j} u; L^p(K)\| \le c_1 \left(\sum_{k=1}^{m_0} \|F_k; L^p(\Omega)\| + \|u; L^p(\Omega)\| \right). \tag{1.3}$$

TEOREMA 1.2 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia u soluzione debole in Ω dell'equazione*

$$\operatorname{div}(A(x,t)Du) + \langle x, BDu\rangle - \partial_t u = \operatorname{div}(F).$$

Supponiamo che l'operatore L verifichi l'Ipotesi H, che $a_{i,j} \in \mathrm{VMO}_L$ per $i,j = 1,\dots,m_0$ e che $u, F_j \in L^p(\Omega)$ per $j = 1,\dots,m_0$, con $p > Q+2$. Allora, per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante positiva c_2, che dipende solo da p, K, Ω e dall'operatore L, tale che

$$\frac{|u(z) - u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{1-\frac{Q+2}{p}}} \le c_2 \left(\sum_{k=1}^{m_0} \|F_k; L^p(\Omega)\| + \|u; L^p(\Omega)\| \right), \tag{1.4}$$

per ogni $z, \zeta \in K, z \neq \zeta$.

In precedenti lavori abbiamo ottenuto vari risultati per gli operatori in cui i coefficienti della matrice A siano funzioni di classe $C^{1,\alpha}$: esistenza e stime della soluzione fondamentale, una disuguaglianza di Harnack invariante (cfr. [11], [12]) risultati di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy (cfr. [13]) e per il problema di Dirichlet generalizzato (cfr. [8]), stime di tipo Schauder (sempre in [8]).

Risultati di regolarità hölderiana per operatori parabolici a coefficienti discontinui sono stati ottenuti con le tecniche di Nash [10] e di Moser [9], anche per equazioni quasilineari (cfr. [1]).

Per gli operatori del tipo (1.1) non sembra che la teoria di Nash-Moser sia immediatamente applicabile. Abbiamo qui ottenuto il risultato di regolarità hölderiana come conseguenza del Teorema 1.1, richiedendo che i coefficienti della matrice A soddisfino una debole ipotesi di regolarità (l'appartenenza alla classe VMO_L). Osserviamo d'altra parte che il risultato enunciato nel Teorema 1.1 è nuovo anche per gli operatori parabolici classici e non vale quando l'ipotesi di regolarità VMO non è verificata.

Le tecniche generali con cui abbiamo dimostrato il Teorema 1.1 sono quelle introdotte da Chiarenza, Frasca e Longo in [4] per gli operatori ellittici in forma di non divergenza, successivamente estese da Bramanti e Cerutti agli operatori parabolici (vedi [2]) e poi da Bramanti, Cerutti e Manfredini, agli operatori del tipo (1.1), in forma di non divergenza (vedi [3]). Le stesse tecniche sono state utilizzare da Di Fazio per gli operatori uniformemente ellittici in forma di divergenza [5].

Per adattate le tecniche di Chiarenza Frasca e Longo allo studio degli operatori (1.1) abbiamo dovuto dimostrare una formula di rappresentazione per le soluzioni deboli e le loro derivate, senza poter supporre che queste siano approssimabili con soluzioni di equazioni regolarizzate.

La prova di questo risultato costituisce il contenuto del paragrafo 3; nei paragrafi 4 e 5 vengono dimostrati i Teoremi 1.1 e 1.2, rispettivamente.

La dimostrazione del Teorema 1.2 si basa sostanzialmente sulla seguente osservazione: se indichiamo con I_{m_0} la matrice identità $m_0 \times m_0$, e definiamo la matrice costante $N \times N$

$$J = \begin{pmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

possiamo riscrivere l'equazione (1.1) nella seguente forma

$$L_0 u \equiv \operatorname{div}(JDu) + \langle x, BDu \rangle - \partial_t u = \operatorname{div}(\widetilde{F}), \tag{1.6}$$

dove $\widetilde{F} = F + JDu - ADu$ e quindi, come conseguenza del Teorema 1.1, $\widetilde{F}_j \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ per $j = 1, \dots, m_0$, (mentre $\widetilde{F}_j = 0$ per $j = m_0 + 1, \dots, N$).

Utilizzando la formula di rappresentazione per le soluzioni di (1.6) ed una disuguaglianza di Hörmander puntuale per la soluzione fondamentale di L_0 e per le sue derivate (Proposizione 5.2), si ottiene immediatamente il risultato di regolarità interna.

RINGRAZIAMENTI. Vogliamo ringraziare il Prof. E. Lanconelli, per aver suggerito il problema, il Prof. A. Cavallucci per alcune utili discussioni.

2 Alcuni risultati noti

Riportiamo alcuni risultati noti che riguardano gli operatori (1.1) con la matrice A costante. Osserviamo che, a causa dell'Ipotesi H, l'operatore "congelato"

$$L_\zeta = \operatorname{div}(A(\zeta)D) + \langle x, BD \rangle - \partial_t \tag{2.1}$$

è ipoellittico per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ (cfr. [7]) ed è invariante rispetto al seguente gruppo di *traslazioni* e al seguente gruppo di *dilatazioni* di $\mathbb{R}^{N+1}$:

DEFINIZIONE 2.1 *Per ogni* $(x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *definiamo*

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \quad E(t) = \exp(-tB^T)$$

e

$$D(\lambda) = \operatorname{diag}\big(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}\big),$$

ove I_{m_j} *indica la matrice identità* $m_j \times m_j$. *Diremo che* $\big(\mathbb{R}^{N+1}, \circ\big)$ *è il "gruppo di traslazioni associato ad* L*" e che* $\big(D(\lambda), \lambda^2\big)_{\lambda>0}$ *è il "gruppo di dilatazioni associato ad* L*".*

Introduciamo ora una *norma* omogenea di grado 1 rispetto al gruppo di dilatazioni ed associamo ad essa una quasidistanza. Abbiamo preferito la definizione scelta da Fabes e Rivière in [6], particolarmente adatta allo studio degli integrali singolari. Nella Proposizione successiva sono elencate alcune proprietà di questa norma; per la prova rimandiamo alla Proposizione 1.2 di [3].

DEFINIZIONE 2.2 *Siano* $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ *le costanti per cui la matrice* $D(\lambda)$ *si scrive nella forma* $D(\lambda) = \operatorname{diag}\big(\lambda^{\alpha_1}, \lambda^{\alpha_1}, \dots, \lambda^{\alpha_N}\big)$. *Se* $z \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$ *poniamo* $\|z\| = \varrho$ *se* ϱ *è l'unica soluzione positiva dell'equazione*

$$\frac{x_1^2}{\varrho^{2\alpha_1}} + \frac{x_2^2}{\varrho^{2\alpha_2}} + \dots + \frac{x_N^2}{\varrho^{2\alpha_N}} + \frac{t^2}{\varrho^4} = 1,$$

e $\|z\| = 0$ *se* $z = 0$.

Indicheremo con

$$d(z,w) = \|w^{-1} \circ z\|$$

e con $B_r(z)$ *la d-sfera di centro* z *e raggio* r.

PROPOSIZIONE 2.3 *L'applicazione* $z \mapsto \|z\|$ *ha le seguenti proprietà:*

(i) $\|D(\lambda)z\| = \lambda\|z\|$ *per ogni* $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ *e per ogni* $\lambda > 0$;

(ii) L'insieme $\{z : \|z\| = 1\}$ *è la sfera euclidea* $\Sigma_{N+1} = \{(x,t) : |x|^2 + t^2 = 1\}$;

(iii) Esiste una costante $c_0 = c_0(B) > 0$ *(dipende solo dalla matrice* B*) tale che per ogni* $z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ *si ha*

$$\|z \circ \zeta\| \le c_0(\|z\| + \|\zeta\|);$$

(iv) Esiste una costante $c_1 = c_1(B) > 0$ *tale che*

$$\frac{1}{c_1}\|z\| \le \|z^{-1}\| \le c_1\|z\| \quad \textit{per ogni } z \in \mathbb{R}^{N+1};$$

(v) Per ogni compatto K di $\mathbb{R}^{N+1}$ esiste $c_2 = c_2(B, K) > 0$ tale che

$$|z - \zeta| \leq c_2 \|\zeta^{-1} \circ z\|, \quad \textit{per ogni } z, \zeta \in K \textit{ con } \|\zeta^{-1} \circ z\| \leq 1,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^{N+1}$.

OSSERVAZIONE 2.4 La misura di Lebesgue è invariante rispetto al gruppo di traslazioni associato ad L, in quanto $\det E(t) = e^{t\,\mathrm{tr}B} = 1$. Inoltre risulta

$$\mathrm{mis}(B_r(0)) = r^{Q+2}\mathrm{mis}(B_1(0)),$$

dove

$$Q = m_0 + 3m_1 + \ldots + (2r+1)m_r,$$

in quanto $\det D(\lambda) = \lambda^Q$. Chiameremo "dimensione omogenea" di $\mathbb{R}^{N+1}$ il numero intero $Q + 2$.

Introduciamo ora gli spazi di funzioni BMO_L e VMO_L, modellati sulle strutture di gruppo della Definizione 2.1.

Indicheremo con B una qualunque sfera di $\mathbb{R}^{N+1}$, rispetto alla norma introdotta nella Definizione 2.2, con B_r una sfera di raggio r e, per ogni $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$,

$$u_B = \frac{1}{\mathrm{mis}(B)} \int_B u.$$

DEFINIZIONE 2.5 *Per ogni funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ poniamo*

$$\|u\|_* = \sup_B \frac{1}{\mathrm{mis}(B)} \int_B |u(z) - u_B| dz, \quad \eta_u(r) = \sup_{\varrho \leq r} \frac{1}{\mathrm{mis}(B_\varrho)} \int_{B_\varrho} |u(z) - u_{B_\varrho}| dz.$$

Definaimo allora

$$\mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1}) = \left\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1}) : \|u\|_* < +\infty \right\},$$
$$\mathrm{VMO}_L(\mathbb{R}^{N+1}) = \left\{ u \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1}) : \lim_{r \to 0} \eta_u(r) = 0 \right\}.$$

Ricordiamo ora alcuni risultati di [7] e di [11]:

PROPOSIZIONE 2.6 *Fissato $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, poniamo*

$$C(t, z_0) = \int_0^t E(s) A(z_0) E^T(s) ds.$$

Allora, la matrice $C(t,z_0)$ risulta definita positiva per ogni $t>0$ e la soluzione fondamentale di L_{z_0} definito in (2.1), con polo in zero, è

$$\Gamma(z_0;x,t)=\frac{1}{(4\pi)^{N/2}(\det C(t,z_0))^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t,z_0)x,x\rangle\right) \tag{2.2}$$

per $t>0, \Gamma(z_0;x,t)=0$ per $t\le 0$.

La soluzione fondamentale di L_{z_0} con polo in (ξ,τ) è la traslata a sinistra di $\Gamma(z_0;\cdot)$ rispetto al gruppo $(\mathbb{R}^{N+1},\circ)$:

$$\Gamma(z_0;(\xi,\tau)^{-1}\circ(x,t)). \tag{2.3}$$

La (2.3), come funzione delle variabili (ξ,τ), è la soluzione fondamentale dell'operatore $L^*_{z_0}=\operatorname{div}(A(z_0)D)-Y^*$, con polo in (x,t).

Esiste un operatore L^+ del tipo (1.1), con i coefficienti $a_{i,j}$ costanti, ed una costante positiva c^+ tale che, se Γ^+ indica la soluzione fondamentale di L^+, allora

$$\begin{aligned}\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)&\le c^+\,\Gamma^+(\zeta^{-1}\circ z)\\ \left|\partial_{x_j}\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right|&\le c^+\,\frac{\Gamma^+(\zeta^{-1}\circ z)}{\sqrt{t-\tau}},\\ \left|\partial_{x_ix_j}\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right|&\le c^+\,\frac{\Gamma^+(\zeta^{-1}\circ z)}{t-\tau},\end{aligned} \tag{2.4}$$

per $i,j=1,\dots,m_0$, per ogni $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$, $z=(x,t)$, $\zeta=(\xi,\tau)$, con $t<\tau$, (cfr. [11], Proposizione 2.4 e Corollario 2.1).

In seguito utilizzeremo le seguenti notazioni: $\Gamma_i(z_0;\cdot)=\partial_{x_i}\Gamma(z_0;\cdot)$ e $\Gamma_{ij}(z_0;\cdot)=\partial_{x_ix_j}\Gamma(z_0;\cdot)$, per $i,j=1,\dots,m_0$. Osserviano esplicitamente che $\Gamma(z_0;\cdot)$ è omogenea di grado $-Q$ rispetto al gruppo $\left(D(\lambda),\lambda^2\right)_{\lambda>0}$ e che, per $i,j=1,\dots,m_0$, $\Gamma_i(z_0;\cdot)$ e $\Gamma_{ij}(z_0;\cdot)$ sono omogenee di grado $-(Q+1)$ e $-(Q+2)$, rispettivamente.

Indicheremo con $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale e completo in $L^2(\Sigma_{N+1})$ costituito da polinomi armonici (armoniche sferiche). Converremo di prolungare le K_m ad $\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\}$ in modo che siano funzioni omogenee di grado 0.

I seguenti risultati, già utilizzati in [4] ed in [3], riguardano lo sviluppo in armoniche sferiche di funzioni omogenee.

PROPOSIZIONE 2.7 *Sia $F\in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$ una funzione omogenea di grado α. Allora esiste una successione $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\|z\|^\alpha K_m(z);$$

inoltre, per ogni $r\in\mathbb{N}$ esiste $c(r)>0$, tale che

$$|b_m|\sup_{z\in\Sigma_{N+1}}|K_m(z)|\le c(r)m^{-r}.$$

Per quanto riguarda lo sviluppo in armoniche sferiche della funzione $\Gamma(z_0;\cdot)$,

$$\Gamma(z_0;z)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m(z_0)\|z\|^{-Q}K_m(z),$$

si ha che, per ogni $r\in\mathbb{N}$ *esiste* $c(r)>0$, *tale che*

$$\sup_{z_0\in\mathbb{R}^{N+1}}|b_m(z_0)|\sup_{z\in\Sigma_{N+1}}|K_m(z)|\le c(r)m^{-r}.$$

Un risultato analogo vale per le derivate $\Gamma_j(z_0;\cdot),\Gamma_{i,j}(z_0;\cdot)$ *ed* $Y\Gamma(z_0;\cdot)$.

Riportiamo infine due teoremi sugli integrali singolari, il primo dei quali è dimostrato in [3], Teorema 3.1, il secondo è ben noto nel caso euclideo (cfr. [15], Teorema 1, Capitolo 5), per il caso non euclideo la prova è contenuta nel Teorema 7 di [14].

TEOREMA 2.8 *Assegnata una funzione* $a\in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1})$, *poniamo per ogni* $g\in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$, *con* $p>1$, *e per* $i,j=1,\dots,m_0$,

$$T_{ij}g(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\varepsilon}\Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)g(\zeta)\,d\zeta,$$

$$C_{ij}[a,g](z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\varepsilon}\Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)[a(z)-a(\zeta)]g(\zeta)\,d\zeta.$$

Allora $T_{ij}g, C_{ij}[a,g]\in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$ *ed esiste una costante positiva* $c=c(p)$ *tale che*

$$\|T_{ij}g\|_p\le c\|g\|_p;\quad \|C_{ij}[a,g]\|_p\le c\|a\|_*\|g\|_p.$$

OSSERVAZIONE 2.9 *Nel corso del seminario faremo uso del seguente risultato intermedio della prova del Teorema 2.8. Consideriamo lo sviluppo in armoniche sferiche della funzione* $\Gamma_{i,j}(z_0,\cdot)$:

$$\Gamma_{i,j}(z_0,\zeta)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m(z_0)\frac{K_m(\zeta)}{\|\zeta\|^{Q+2}};$$

posto $b_m^+=\sup_{z_0}|b_m(z_0)|$ *e*

$$T_{i,j}^+g(z)=\lim_{\varrho\to 0}\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+\left|\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\varrho}\frac{K_j(\zeta^{-1}\circ z)}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2}}g(\zeta)d\zeta\right|,$$

risulta $T_{ij}^+g\in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$ *ed esiste una costante positiva* $c^+=c^+(p)$ *tale che*

$$\|T_{ij}^+g\|_p\le c^+\|g\|_p.$$

TEOREMA 2.10 *Siano* $\alpha \in]0, Q+2[, q > 1$ *e sia* $K \in C(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$ *una funzione omogenea di grado* $-\alpha$ *rispetto al gruppo* $\left(D(\lambda), \lambda^2\right)_{\lambda>0}$. *Allora, se* $g \in L^q(\mathbb{R}^{N+1})$, *la funzione*

$$Tg(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} K(\zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta,$$

risulta definita quasi dappertutto, ed esiste $c = c(q) > 0$ *tale che*

$$\|Tg\|_p \leq c \max_{\|z\|=1} |K(z)| \cdot \|g\|_q,$$

ove p *verifica la relazione* $\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{Q+2} = \frac{1}{q} + 1$.

3 Formule di rappresentazione

Dimostriamo innanzitutto una formula di rappresentazione per le soluzioni di (1.1). A tal fine costruiamo una funzione ausiliaria. Fissati $r, s \in \mathbb{R}, 0 < s < r$, sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che

$$\varphi(t) = 1 \text{ per } 0 \leq t \leq s, \quad \varphi(t) = 0 \text{ per } t \geq r. \tag{3.1}$$

Per ogni $\zeta_0 \in \Omega$ e per $r > 0$ tale che $B_r(\zeta_0) \subset \Omega$ poniamo

$$\eta(z) = \varphi\left(\|\zeta_0^{-1} \circ z\|\right). \tag{3.2}$$

Se u è soluzione di (1.1), allora

$$L(\eta u) = \operatorname{div}(G) + g,$$

ove

$$\begin{aligned} G &= \eta F + uAD\eta, \\ g &= \langle ADu, D\eta\rangle - \langle F, D\eta\rangle + uY^*\eta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Osserviamo che, se $F_1, ..., F_{m_0}, u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_{m_0}} u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$, con $q < p$, allora risulta $G_1, ..., G_{m_0} \in L^p(B_r(\zeta_0)), g \in L^q(B_r(\zeta_0))$ ed esiste una costante c, che dipende solo da r, s, p e q, tale che

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m_0} \|G_j\|_p \leq c\left(\|u\|_p + \sum_{j=1}^{m_0} \|F_j\|_p\right), \\ &\|g\|_q \leq c\left(\|u\|_p + \sum_{j=1}^{m_0} \left(\|F_j\|_p + \|\partial_{x_j} u\|_q\right)\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove le norme sono calcolate su $B_r(\zeta_0)$. Per brevità di notazione nel seguito scriveremo B_r invece di $B_r(\zeta_0)$.

TEOREMA 3.1 *Se $\eta, G_1, \ldots, G_{m_0}, g$ sono le funzioni definite in (3.2) e in (3.3), allora*

$$(\eta u)(z) = \sum_{h,k=1}^{m_0} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma_h(z;\zeta^{-1} \circ z)\,[(a_{h,k}(z) - a_{h,k}(\zeta))\partial_{x_k}(\eta u)(\zeta) - G_h(\zeta)]\,d\zeta$$
$$- \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z;\zeta^{-1} \circ z) g(\zeta)\,d\zeta, \tag{3.5}$$

e, per $j = 1, \ldots, m_0$,

$$\partial_{x_j}(\eta u)(z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma_j(z;\zeta^{-1} \circ z) g(\zeta)\,d\zeta - \sum_{k=1}^{m_0} G_k(z) \int_{\|\zeta\|=1} \Gamma_j(z;\zeta)\nu_k(\zeta)\,d\sigma +$$
$$\sum_{h,k=1}^{m_0} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\geq\varepsilon} \Gamma_{jh}(z;\zeta^{-1} \circ z)\,\big[(a_{h,k}(z) - a_{h,k}(\zeta))\partial_{x_k}(\eta u)(\zeta) - G_h(\zeta)\big]\,d\zeta, \tag{3.6}$$

per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, dove ν_k è la $k-$esima componente della normale esterna a Σ_{N+1}.

Nella prova del Teorema faremo uso del seguente

LEMMA 3.2 *Esiste una costante positiva k, che dipende solo dalla matrice B, tale che*

$$\left|\frac{\partial\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial\xi_j}\right| \leq k \quad \text{per } j = 1, \ldots, m_0,$$
$$\left|Y^*\|\zeta^{-1} \circ z\|\right| \leq \frac{1}{\|\zeta^{-1} \circ z\|}$$

per ogni $\zeta = (\xi, \tau)$ e per ogni $z = (x, t)$.

Qui e nel seguito si intende che l'operatore Y^* è applicato alla variabile ζ. Rimandiamo la prova del Lemma alla fine del paragrafo.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.1 Otterremo la 3.5 a partire da una semplice identità, che vale per le funzioni regolari, attraverso un certo numero di passaggi al limite. Poiché la prova risulta un po' complicata, la abbiamo divisa in tre parti principali **A**, **B** e **C**.

Sia v una funzione di classe $C_0^\infty(\Omega)$. Per ogni fissato $z_0 \in \Omega$ e per ogni funzione $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, si ha

$$\begin{aligned} -\int_\Omega L_{z_0} v(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta = &-\int_\Omega g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta - \int_\Omega \langle G(\zeta), D\psi(\zeta)\rangle d\zeta + \\ &\int_\Omega \langle [A(z_0) - A(\zeta)]D(\eta u)(\zeta), D\psi(\zeta)\rangle d\zeta + \\ &\int_\Omega \langle A(z_0)D(v-\eta u)(\zeta), D\psi(\zeta)\rangle d\zeta - \int_\Omega (v-\eta u)(\zeta)Y^*\psi(\zeta)d\zeta. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A. In questo primo punto vogliamo dimostrare che (3.7) vale anche quando $\psi(\zeta)$ viene sostituita da $\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)$. In questo modo potremo sfruttare il fatto che, essendo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ ed L_{z_0} a coefficienti costanti, risulta

$$v(z) = -\int_\Omega (L_{z_0}v)(\zeta)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)d\zeta.$$

A tal fine osserviamo che tutte le funzioni in (3.7) sono nulle fuori da un compatto, quindi la (3.7) vale per ogni $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Se ora φ indica la funzione definita in (3.1), relativamente ad $r = 1, s = \frac{1}{2}$, poniamo, per ogni $z, z_0 \in \Omega$ e per ogni $\delta > 0$

$$\psi_\delta(z_0;z;\zeta) = \left[1 - \varphi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\right]\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z). \tag{3.8}$$

Essendo $L_{z_0}v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, si verifica facilmente che

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega (L_{z_0}v)(\zeta)\psi_\delta(z_0;z;\zeta)d\zeta = \int_\Omega (L_{z_0}v)(\zeta)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)d\zeta.$$

Consideriamo ora il primo termine del secondo membro di (3.7). Utilizzando la prima delle (2.4), si ha

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega [\varphi_\delta(z_0;z;\zeta) - \Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)]g(\zeta)d\zeta\right| \le \\ &\qquad c^+\int_\Omega \varphi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\Gamma^+(\zeta^{-1}\circ z)|g(\zeta)|d\zeta \equiv R_\delta^+(g)(z). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per ogni fissato $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, la funzione $R_\delta^+(g)(z)$ è decrescente nella variabile δ; inoltre

$$\|R_\delta^+(g)\|_p \le \|g\|_p \left\|\Gamma^+(\eta)\varphi\left(\frac{\|\eta\|}{\delta}\right)\right\|_1 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Di conseguenza $R_\delta^+(g)(z) \to 0$ per $\delta \to 0$, per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, e quindi

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \psi_\delta(z_0;z;\zeta)g(\zeta)d\zeta = \int_\Omega \Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)g(\zeta)d\zeta, \tag{3.9}$$

per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, uniformemente in $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Per passare al limite nei successivi integrali, osserviamo che

$$\partial_{\xi_j}\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}\psi'\left(\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\delta}\right) \cdot \frac{\partial\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial\xi_j},$$

per $j = 1, \dots, m_0$, da cui segue, per il Lemma 3.2, che

$$\left|\partial_{\xi_i}\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\delta}\right)\right| \leq \frac{c}{\delta}\left|\psi'\left(\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\delta}\right)\right|.$$

Procedendo come per la prova di (3.9), utilizzando la seconda disuguaglianza di (2.4) e la pecedente osservazione, si ottiene allora che

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \langle G(\zeta), D\psi_\delta(z_0; z; \zeta)\rangle d\zeta = \int_\Omega \langle G(\zeta), D\Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z)\rangle d\zeta, \\
&\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \langle A(z_0)D(v - \eta u)(\zeta), D\psi_\delta(z_0; z; \zeta)\rangle d\zeta = \\
&\qquad \int_\Omega \langle A(z_0)D(v - \eta u), D\Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z)\rangle d\zeta, \\
&\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \langle [A(z_0) - A(\zeta)]D(\eta u)(\zeta), D\psi_\delta(z_0; z; \zeta)\rangle d\zeta = \\
&\qquad \int_\Omega \langle [A(z_0) - A(\zeta)]D(\eta u), D\Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z)\rangle d\zeta,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, uniformemente in $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$. Osserviamo che per avere una proprietà di decrescenza analoga a quella di cui gode la funzione $R_\delta^+(g)(z)$ conviene utilizzare, in luogo di ψ', la funzione

$$\psi_1(t) \equiv \max\{|\psi'(s)|, s \geq t\}.$$

Dalle (3.9), (3.10) e dalla (3.7) possiamo già concludere che esiste una funzione in $L^p(B_r)$, che indicheremo con $T(v - \eta u)(z_0, z)$ tale che

$$\int_\Omega (v - \eta u)(\zeta)Y^*\psi_\delta(z_0; \zeta^{-1} \circ z)d\zeta \xrightarrow[\delta\to 0]{} T(v - \eta u)(z_0, z),$$

per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, uniformemente in $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Se utilizziamo le notazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
w(z_0, z) = &-\int_\Omega \Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z)g(\zeta)d\zeta + \int_\Omega \langle G(\zeta), D\Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z)\rangle d\zeta \\
&+ \int_\Omega \langle [A(z_0) - A(\zeta)]D(\eta u)(\zeta), D\Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z)\rangle d\zeta
\end{aligned} \tag{3.11}$$

e

$$S(v-\eta u)(z_0,z)=\int_\Omega \langle A(z_0)D(v-\eta u)(\zeta), D\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\rangle d\zeta,$$

si ottiene allora che esiste un insieme di misura nulla $H\subset\mathbb{R}^{N+1}$ tale che

$$(\eta u)(z)-w(z_0,z)=(\eta u)(z)-v(z)-S(v-\eta u)(z_0,z)+T(v-\eta u)(z_0,z) \quad (3.12)$$

per ogni $z\in\mathbb{R}^{N+1}\backslash H$, e per ogni $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$.

Più avanti indicheremo in maniera più esplicita la dipendenza di T da $v-\eta u$, in termini della funzione $\Gamma(z_0;\cdot)$.

B. Il nostro prossimo obiettivo è una stima delle funzioni $S(v-\eta u)$ e $T(v-\eta u)$ uniforme in z_0. Consideriamo dapprima $S(v-\eta u)$. Posto

$$S^+(v-\eta u)(z)=\mu\, c^+\int_\Omega \frac{\Gamma^+(\zeta^{-1}\circ z)}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{j=1}^m |\partial_{x_j}(v-\eta u)(\zeta)|d\zeta,$$

per la seconda disuguaglianza delle (2.4), risulta $S^+(v-\eta u)\in L^p$ e

$$\begin{aligned}&|S(v-\eta u)(z_0,z)|\le S^+(v-\eta u)(z),\\ &\|S^+(v-\eta u)\|_p\le c(B_r)\sum_{j=1}^m\|\partial_{x_j}(v-\eta u)\|_p,\end{aligned} \quad (3.13)$$

per ogni z, z_0.

Consideriamo ora $T(v-\eta u)$. Per utilizzare alcuni risultati della teoria degli integrali singolari dimostriamo innanzitutto che

$$T(v-\eta u)(z_0,z)=\lim_{\varrho\to 0}\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\varrho}(v-\eta u)(\zeta)Y^*\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)d\zeta, \quad (3.14)$$

per quasi ogni $z\in\mathbb{R}^{N+1}$, e per ogni $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$. Osserviamo dapprima che, per ogni $w\in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$, risulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N+1}} w(\zeta)Y^*\psi_\delta(z_0;\zeta^{-1}\circ z)d\zeta=&\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\delta} w(\zeta)Y^*\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)d\zeta+\\ &\int_{\frac{\delta}{2}\le\|\zeta^{-1}\circ z\|\le\delta} w(\zeta)Y^*\left(\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right)d\zeta;\end{aligned}$$

e poniamo

$$S_\delta w(z,z_0)=\int_{\frac{\delta}{2}\le\|\zeta^{-1}\circ z\|\le\delta} w(\zeta)Y^*\left(\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right)d\zeta.$$

Utilizzando la terza delle stime (2.4) ed il Lemma 3.2 si verifica che esiste una funzione limitata $\widetilde{\varphi}$, nulla in $\mathbb{R}^{N+1}\setminus B_1(0)$, tale che

$$\left|Y^*\left(\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right)\right|\le\frac{1}{\delta^{Q+2}}\widetilde{\varphi}\left(D(\frac{1}{\delta})(\zeta^{-1}\circ z)\right)$$

per ogni $z, z_0, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$. Da questa e dal fatto che

$$\int_{\frac{\delta}{2}\le\|\zeta^{-1}\circ z\|\le\delta} Y^*\left(\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right)d\zeta = 0,$$

si ottiene allora

$$|S_\delta w(z,z_0)| = \left|\int_{\frac{\delta}{2}\le\|\zeta^{-1}\circ z\|\le\delta} Y^*\left(\psi\left(\frac{\|\zeta^{-1}\circ z\|}{\delta}\right)\Gamma(z_0;\zeta^{-1}\circ z)\right)[w(\zeta)-w(z)]d\zeta\right| \le$$
$$\frac{1}{\delta^{Q+2}}\int_{\frac{\delta}{2}\le\|\zeta^{-1}\circ z\|\le\delta}\widetilde{\varphi}\left(D(\frac{1}{\delta})(\zeta^{-1}\circ z)\right)|w(\zeta)-w(z)|d\zeta \equiv S_\delta^+ w(z).$$

Per la disuguaglianza di Minkowskii si ha d'altra parte

$$\|S_\delta^+ w\|_p \le \int_{\frac{1}{2}\le\|\eta\|\le 1}\widetilde{\varphi}(\eta)\left(\int_{\mathbb{R}^{N+1}}|w(z\circ D(\varrho)\eta^{-1})-w(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} d\eta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,$$

e quindi $S_\delta w(z,z_0)\to 0$ per $\delta\to 0$, per quasi ogni $z\in\mathbb{R}^{N+1}$, uniformemente in $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$. Resta così provata la (3.14).

Consideriamo ora lo sviluppo in armoniche sferiche della funzione $Y^*\Gamma(z_0,\cdot)$:

$$Y^*\Gamma(z_0,\zeta^{-1}\circ z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z_0)\frac{K_m(\zeta^{-1}\circ z)}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2}}.$$

Se poniamo $b_m^+ = \sup_{z_0}|b_m(z_0)|$ e

$$T^+(v-\eta u)(z) = \lim_{\varrho\to 0}\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+\left|\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\varrho}\frac{K_m(\zeta^{-1}\circ z)}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2}}(v-\eta u)(\zeta)d\zeta\right|,$$

dall'Osservazione 2.9 e dal fatto che $Y^*\Gamma(z_0,\zeta^{-1}\circ z) = \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(z_0)\partial^2_{\xi_i,\xi_j}\Gamma(z_0,\zeta^{-1}\circ z)$ si ottiene

$$\begin{aligned} |T(v-\eta u)(z_0,z)| &\le T^+(v-\eta u)(z),\\ \|T^+(v-\eta u)\|_p &\le k\|v-\eta u\|_p, \end{aligned} \tag{3.15}$$

per ogni $z, z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$, con k costante positiva che dipende da p e dall'operatore L.

In conclusione, se si definisce

$$\widetilde{T}(v-\eta u) = |(\eta u)(z)-v(z)| + S^+(v-\eta u)(z) + T^+(v-\eta u)(z), \tag{3.16}$$

dalla (3.12), da (3.13) e da (3.15) si ottiene

$$\begin{aligned} |w(z_0;z)-(\eta u)(z)| &\le \widetilde{T}(v-\eta u)(z),\\ \|\widetilde{T}(v-\eta u)\|_p &\le \widetilde{c}\left(\|v-\eta u\|_p + \sum_{j=1}^{m_0}\|\partial_{x_j}(v-\eta u)\|_p\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

per quasi ogni z e per ogni z_0.

C. Consideriamo ora una successione di funzioni $v_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ tale che

$$\|\eta u - v_k\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$
$$\|\partial_{x_j}(\eta u) - \partial_{x_j} v_k\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, m_0.$$

Il risultato provato nel punto **B** vale per ogni v_k; se ora poniamo

$$\widetilde{w}(z) = \inf\left\{\left|\widetilde{T}(v_k - \eta u)(z)\right| : k \in N\right\},$$

allora esiste un insieme di misura nulla $\widetilde{H} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tale che

$$|w(z_0, z) - (\eta u)(z)| \le \widetilde{w}(z), \quad \|\widetilde{w}\|_p \le \inf\{\|\widetilde{T}(v_k - \eta u)\|_p : k \in N\},$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1} \backslash \widetilde{H}$, e per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Pertanto, per la (3.17) e per la scelta della successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, possiamo concludere che

$$(\eta u)(z) = w(z_0, z)$$

per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, e per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1} \backslash \widetilde{H}$. Scegliendo $z_0 = z$ si ottiene la (3.5).

Per quanto riguarda la (3.6), osserviamo preliminarmente che, se $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, procedendo con tecniche usuali (vedi ad esempio il Teorema 2.4 di [3]) si ottiene

$$\partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z_0; \zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma_j(z_0; \zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta,$$

per ogni $j = 1, \dots, m_0$ e per ogni $z, z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$. Lo stesso risultato si estende alle funzioni $g \in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$, con un elementare argomento di densità, utilizzando il Teorema 2.10. Procedendo nello stesso modo per gli altri integrali che definiscono $w(z_0, z)$ ed utilizzando anche il Teorema 2.8 si trova

$$\partial_{x_j} w(z_0, z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma_j(z_0; \zeta^{-1} \circ z) g(\zeta)\, d\zeta - \sum_{k=1}^{m_0} G_k(z) \int_{\|\zeta\|=1} \Gamma_j(z_0; \zeta) \nu_k(\zeta)\, d\sigma +$$
$$\sum_{h,k=1}^{m_0} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\varepsilon} \Gamma_{jh}(z_0; \zeta^{-1} \circ z) \left[(a_{h,k}(z_0) - a_{h,k}(\zeta)) \partial_{x_k}(\eta u)(\zeta) - G_h(\zeta)\right] d\zeta, \tag{3.18}$$

per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$. La prova del Teorema sarà conclusa se potremo scrivere l'identità (3.18) con $z_0 = z$.

Per ogni fissato z_0 consideriamo lo sviluppo in armoniche sferiche di ognuno dei termini che compaiono in (3.18). Possiamo scrivere, con notazioni un po' semplificate,

$$\partial_{x_j}(\eta u)(z) = \partial_{x_j} w(z_0, z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z_0) T_m(g_m)(z),$$

dove, a seconda dell'indice m, g_m indica una delle funzioni $g, G_j, \partial_{x_j}(\eta u), a_{j,h}\partial_{x_h}(\eta u)$, con $j, h = 1, \dots, m_0$, mentre T_m indica la convoluzione con una opportuna funzione omogenea. Poiché, come conseguenza della Proposizione 2.7, la serie converge in $L^p(\mathbb{R}^{N+1})$, uniformemente rispetto a z_0, risulta anche

$$\partial_{x_j}(\eta u)(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z) T_m(g_m)(z),$$

per quasi ogni z, e questo conclude la prova del Teorema, in quanto l'ultima espressione coincide con lo sviluppo in armoniche sferiche del scondo membro di (3.6).

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3.2 Ricordiamo che, se $w = (y, s)$ è un qualunque punto di $\mathbb{R}^{N+1}$ abbiamo definito la sua norma $\|w\|$ come l'unica soluzione $\varrho > 0$ dell'equazione

$$M(w, \varrho) = \frac{y_1^2}{\varrho^{2\alpha_1}} + \dots + \frac{y_N^2}{\varrho^{2\alpha_N}} + \frac{s^2}{\varrho^4} = 1.$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial \|w\|}{\partial y_i} = \frac{-1}{\frac{\partial M}{\partial \varrho}(w, \|w\|)} \cdot \frac{\partial M(w, \|w\|)}{\partial y_i},$$

e quindi, essendo $|y_i| \le \|w\|^{\alpha_i}, |s| \le \|w\|^2$, si ottiene

$$\left| \frac{\partial \|w\|}{\partial y_i} \right| \le \frac{|y_i|}{\|w\|^{2\alpha_i - 1}} \le \|w\|^{1-\alpha_i}; \quad \left| \frac{\partial \|w\|}{\partial s} \right| \le \frac{|s|}{\|w\|^3} \le \|w\|^{-1}. \tag{3.19}$$

Cio premesso, scrivendo esplicitamente $\zeta^{-1} \circ z = (x - E(t-\tau)\xi, t - \tau)$, si ottiene

$$\frac{\partial \|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial \xi_j} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial y_k} e_{kj}(t-\tau).$$

Ricordando che $E(s) = \exp(-sB^T)$ e che la matrice B ha la forma "a blocchi" dichiarata nell'Ipotesi H, si verifica che

$$\frac{\partial \|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial y_j} - (t-\tau) \sum_{k=m_0+1}^{m_0+m_1} e_{kj}(1) \frac{\partial \|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial y_k} + \dots +$$
$$\frac{(-(t-\tau))^r}{r!} \sum_{k=m_0+m_1+\dots+m_{r-1}+1}^{N} e_{kj}(1) \frac{\partial \|\zeta^{-1} \circ z\|}{\partial y_k}.$$

Da questa uguaglianza, e da (3.19), ricordando che $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m_0} = 1, \alpha_{m_0+1} = \dots = \alpha_{m_0+m_1} = 3, \dots, \alpha_{m_0+m_1+\dots+m_{r-1}+1} = \dots = \alpha_N = 2r+1$, segue subito la prima asserzione del Lemma.

La seconda si ottiene nello stesso modo, dal momento che risulta

$$Y^* \|\zeta^{-1} \circ z\| = -\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial s}(\zeta^{-1} \circ z),$$

come si verifica con un calcolo diretto.

4 Stime L^p

Proveremo innanzitutto alcuni risultati preliminari. Per abbreviare le notazioni indicheremo con D_0u il vettore costituito dalle prime m_0 derivate di u

$$D_0u = (\partial_{x_1}u, \dots, \partial_{x_{m_0}}u)$$

e scriveremo $\|F\|_p, \|D_0u\|_p$ invece di $\sum_{k=1}^{m_0}\|F_k\|_p, \sum_{k=1}^{m_0}\|\partial_{x_k}u\|_p$, rispettivamente.

Per ogni $\zeta_0 \in \Omega$ e per $r, s > 0$ tali che $B_r(\zeta_0) \subset \Omega$ ed $s < r$ consideriamo la funzione η definita in (3.2).

Nel seguito scriveremo B_r invece di $B_r(\zeta_0)$ e

$$v(z) = \eta(z)u(z);$$

con le notazioni introdotte in (3.3) risulta

$$Lv = \operatorname{div}(G) + g.$$

Valgono i seguenti risultati:

LEMMA 4.1 *Se $u, F \in L^p(B_r)$ e $D_0u \in L^q(B_r)$, con $p, q > 0$ tali che $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{Q+2}$, allora $D_0v \in L^p(B_r)$ ed esiste una costante positiva r_0, che dipende solo dall'operatore L tale che, se $r \in]0, r_0]$, risulta*

$$\|D_0v\|_p \le k\left(\|F; L^p(B_r)\| + \|u; L^p(B_r)\| + \|D_0u; L^q(B_r)\|\right),$$

con $k = k(r, s) > 0$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 4.1 Dimostriamo la disuguaglianza supponendo momentaneamenta di sapere che $D_0u \in L^p(B_r)$.

Utilizziamo le notazioni dei Teoremi 2.10 e 2.8, ed indichiamo con

$$c_{j,k}(z) = \int_{\|\zeta\|=1} \Gamma_j(z;\zeta)\nu_k(\zeta)\, d\sigma.$$

Per le formule di rappresentazione del Teorema 3.1 risulta

$$v_{x_j}(z) = \sum_{h,k=1}^{m_0} C_{j,k}[a_{h,k}, v_{x_k}](z) - \sum_{h=1}^{m_0} T_{j,h}(G_h)(z) - Tg(z) - \sum_{h=1}^{m_0} c_{j,h}(z)G_h(z),$$

e quindi, per i Teoremi suddetti, (ed essendo le funzioni $c_{j,h}$ limitate)

$$\|\partial_{x_j}v\|_p \le c\left(\sum_{h,k=1}^{m_0}\|a_{h,k}\|_*\|\partial_{x_k}v\|_p + \|G\|_p + \|g\|_q\right),$$

ove le norme $\|\cdot\|_*$ sono calcolate in effetti sulla sfera $B_r(\zeta_0)$. Di conseguenza, avendo supposto i coefficienti $a_{h,k}$ appartenenti alla classe VMO_L, esiste $r_0 > 0$ tale che per ogni $r \in]0, r_0]$ risulta

$$\|D_0 v\|_p \leq c' \left(\|G\|_p + \|g\|_q\right).$$

Essendo la funzione η limitata e con supporto nella sfera $B_r(\zeta_0)$ ed essendo $p > q$, da questa e da (3.4) segue immadiatamente la stima dichiarata.

Senza l'ipotesi che $D_0 u \in L^p(B_r)$, procedendo nello stesso modo, tenendo conto che tutte le funzioni sono a supporto compatto, possiamo osservare che l'applicazione

$$\widetilde{T} : (L^q(B_r))^{m_0} \to (L^q(B_r))^{m_0}, \tag{4.1}$$

che ad ogni funzione $U \in L^q(B_r)$ associa $\widetilde{T}U$ definita da

$$(\widetilde{T}U)_j(z) = \sum_{h,k=1}^{m_0} C_{j,k}[a_{h,k}, U_k](z) - \sum_{h=1}^{m_0} T_{j,h}(G_h)(z) - Tg(z) - \sum_{h=1}^{m_0} c_{j,h}(z) G_h(z),$$

per $j = 1, \ldots, m_0$ è una contrazione, e che quindi $D_0 v$ è l'unico punto fisso di $\widetilde{T}$. D'altra parte, con una scelta opportuna di r_0, si ha anche che $\widetilde{T}$ è una contrazione di $L^p(B_r)$, e quindi ha un unico punto fisso $U_p \in L^p(B_r)$. Poiché $L^q(B_r) \subset L^p(B_r), U_p$ è anche punto fisso di $\widetilde{T}$ in $L^q(B_r)$ e quindi $D_0 v = U_p \in L^p(B_r)$.

OSSERVAZIONE 4.2 Il procedimento utilizzato per provare che $D_0 v \in L^p(B_r)$ è ispirato al lavoro di Chiarenza, Frasca e Longo. Con un numero finito di iterazioni si ottiene facilmentre che, se u è soluzione debole di (1.1), con $u, F \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora anche $D_0 u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Nel seguito useremo questo risultato senza citarlo esplicitamente.

LEMMA 4.3 *Siano $\varrho, \sigma \in \mathbb{R}$, con $0 < \sigma < \varrho \leq r_0$, dove r_0 è come nel Lemma 4.1, e sia $p > 2$. Allora esiste una costante $c_0 = c_0(\varrho, \sigma, p) > 0$ tale che*

$$\|D_0 u; L^p(B_\sigma)\| \leq c_0 \left(\|F; L^p(B_\varrho)\| + \|u; L^p(B_\varrho)\| + \|D_0 u; L^2(B_\varrho)\|\right).$$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 4.3 Nel caso in cui $\frac{1}{p} + \frac{1}{Q+2} \geq \frac{1}{2}$ il risultato segue immediatamente dal Lemma 4.1, applicato con $\varrho = r$ e $\sigma = s$, in quanto $\eta(z) = 1$ per ogni $z \in B_s(\zeta_0)$.

In caso contrario occorre iterare il procedimento: poniamo

$$m = \min\left\{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{Q+2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right\}, \quad \delta = \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{\frac{1}{m}}$$

e, per $h = 1, \dots, m+1$,

$$s_h = \delta^{h-1}\sigma, \quad r_h = \delta^h \sigma, \quad q_h = \frac{p(Q+2)}{(h-1)p + (Q+2)}.$$

Per il Lemma 4.1 risulta allora

$$\|D_0 u; L^{q_h}(B_{s_h})\| \le c_h \left(\|F; L^{q_h}(B_{r_h})\| + \|u; L^{q_h}(B_{r_h})\| + \|D_0 u; L^{q_{h+1}}(B_{r_h})\|\right)$$

per ogni $h = 1, \dots, m$. Essendo $s_1 = \sigma, r_m = \varrho$ e $q_{m+1} \le 2 < q_m < \dots < q_1 = p$, da questa segue la prova del Lemma.

LEMMA 4.4 *Supponiamo che $u, F \in L^2(B_r)$. Allora, per ogni r, s, con $0 < s < r$ esiste una costante $c_1 = c_1(r,s) > 0$ tale che*

$$\|D_0 u; L^2(B_s)\| \le c_1 \left(\|F; L^2(B_r)\| + \|u; L^2(B_r)\|\right).$$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 4.4 Nella definizione di soluzione debole utilizziamo come funzione test

$$\psi = u\eta^2$$

dove η è la funzione definita in (3.2). Con un conto diretto si trova

$$\int \left(\eta^2 \langle ADu, Du\rangle + 2u\eta\langle ADu, D\eta\rangle\right) + \frac{1}{2}\int Y\left(\eta^2 u^2\right) - \int \eta u^2 Y \eta = \int \left(\eta^2\langle F, Du\rangle + 2u\eta\langle F, D\eta\rangle\right),$$

da cui segue direttamente

$$\begin{aligned} \mu^{-1}\|\eta D_0 u\|_2^2 &\le c\left(\|u\|_2^2 + \|u\|_2\|\eta D_0 u\|_2 + \|F\|_2\|\eta D_0 u\|_2 + \|u\|_2\|F\|_2\right) \\ &\le c'(\varepsilon)\left(\|u\|_2^2 + \|F\|_2^2\right) + \varepsilon\|\eta D_0 u\|_2^2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ove le norme sono calcolate in $B_r(\zeta_0)$, μ è la costante che compare nell'Ipotesi H1 ed ε è arbitrario. Poiché $\eta(z) = 1$ per ogni $z \in B_s(\zeta_0)$, da (4.2) segue immediatamente la prova del Lemma.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.1 Osserviamo innanzitutto che è sufficiente dimostrare il Teorema nel caso in cui l'aperto Ω sia una sfera $B_r(\zeta_0)$ e K sia $\overline{B_s(\zeta_0)}$, con $0 < s < r$. Ricordiamo poi che nell'Osservazione 4.2 abbiamo già provato che $D_0 u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Inoltre basta considerare solo il caso $p > 2$, in quanto il caso $p = 2$ è contenuto nel Lemma 4.4 ed il caso $1 < p < 2$ si ottiene con un elementare argomento di dualità.

Ciò premesso, la prova del Teorema è una banale conseguenza dei Lemmi 4.3 e 4.4.

5 Regolarità hölderiana

In questo paragrafo dimostrerermo il risultato di regolarità hölderiana enunciato nel Teorema 1.2. Premettiamo il seguente lemma, che migliora un risultato già noto (cfr.[3], Lemma 3.5 e [14], Proposizione 3.4).

LEMMA 5.1 *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $K \in C^1(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$ una funzione omogenea di grado α rispetto al gruppo $\left(D(\lambda), \lambda^2\right)_{\lambda>0}$. Allora esistono due costanti $c > 0$ e $M > 1$ tali che se $\|z\| \geq M\,\|z^{-1} \circ \zeta\|$:*

$$|K(\zeta) - K(z)| \leq c\,\|z^{-1} \circ \zeta\| \cdot \|z\|^{\alpha-1}.$$

Il risultato seguente è un immediato corollario del Lemma.

PROPOSIZIONE 5.2 (Disuguaglianza di tipo Hörmander puntuale) *Esistono due costanti $c > 0$ e $M > 1$ tali che, per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per $i, j = 1, \ldots, m_0$,*

$$|\Gamma(z_0; w^{-1} \circ \zeta) - \Gamma(z_0; w^{-1} \circ z)| \leq c\,\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\|z^{-1} \circ w\|^{Q+1}},$$

$$|\Gamma_j(z_0; w^{-1} \circ \zeta) - \Gamma_j(z_0; w^{-1} \circ z)| \leq c\,\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\|z^{-1} \circ w\|^{Q+2}},$$

$$|\Gamma_{ij}(z_0; w^{-1} \circ \zeta) - \Gamma_{ij}(z_0; w^{-1} \circ z)| \leq c\,\frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\|z^{-1} \circ w\|^{Q+3}},$$

per ogni z, ζ, w tali che $\|z^{-1} \circ w\| \geq M\|z^{-1} \circ \zeta\|$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 5.1 Indichiamo $w = z^{-1} \circ \zeta$, e supponiamo per il momento che sia $\|z\| = 1$.

Osserviamo preliminarmente che, essendo $M > 1$, si ha per la Proposizione 2.3

$$\|\zeta\| = \|z \circ w\| \leq c_0(1 + 1/M) \leq 2c_0,$$

e quindi, sempre per la Proposizione 2.3,

$$|\zeta - z| \leq c_2\|\zeta^{-1} \circ z\| = c_2\|w\|.$$

Inoltre risulta

$$1 = \|z\| = \|\zeta \circ (w^{-1})\| \leq c_0(\|\zeta\| + \|w^{-1}\|) \leq c_0(\|\zeta\| + c_1\|w\|) \leq c_0(\|\zeta\| + c_1/M),$$

da cui segue, se si sceglie $M > c_0c_1$, dove le costanti c_0 e c_1 sono quelle della Proposizione 2.3,

$$\|\zeta\| \geq \widetilde{c} \equiv \frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{M} > 0.$$

Poiché $K \in C^1(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$,

$$|K(z) - K(\zeta)| \leq \sup_{\bar{c}\leq\|w\|\leq 2c_0} |DK(w)|\,|\zeta - z| \leq c\|w\|,$$

dove ovviamente $c = c_2 \sup_{\bar{c}\leq\|w\|\leq 2c_0} |DK(w)|$.

Se invece z è un qualunque elemento di $\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\}$, allora

$$\begin{aligned}|K(z) - K(\zeta)| &= \|z\|^\alpha |K(D(\|z\|^{-1})z) - K(D(\|z\|^{-1})\zeta)| \\ &\leq c\,\|z\|^\alpha \left\|(D(\|z\|^{-1})z)^{-1} \circ (D(\|z\|^{-1})\zeta)\right\| \\ &= c\,\|z\|^{\alpha-1}\,\|\zeta^{-1} \circ z\|,\end{aligned}$$

in quanto, per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$(D(\lambda)z)^{-1} \circ (D(\lambda)\zeta) = (D(\lambda)\,(z^{-1})) \circ (D(\lambda)\zeta) = D(\lambda)\,(z^{-1} \circ \zeta)\,.$$

Questo prova il Lemma 5.1.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.2 Dimostreremo il Teorema nel caso in cui $K = \overline{B_s(z_0)} \subset \Omega$. Come già osservato nell'introduzione, conviene scrivere l'equazione (1.1) nella forma seguente

$$L_0 u \equiv \operatorname{div}(JDu) + \langle x, BDu\rangle - \partial_t u = \operatorname{div}(\widetilde{F}),$$

dove $\widetilde{F} = F + JDu - ADu$.

Sia $r > s$ tale che $B_r(z_0) \subset \Omega$ e sia η la funzione definita nel paragrafo 3 in (3.2). Posto

$$v(z) = \eta(z)u(z),$$

risulta

$$L_0 v = \operatorname{div}(\widetilde{G}) + \widetilde{g}$$

con

$$\begin{aligned}\widetilde{G} &= \eta\widetilde{F} + JD\eta\,(\equiv \eta(F + JDu - ADu) + JD\eta)\,, \\ \widetilde{g} &= \langle JDu, D\eta\rangle - \langle\widetilde{F}, D\eta\rangle + uY^*\eta.\end{aligned}$$

Notiamo che $\widetilde{G}, \widetilde{g}$ sono nulle fuori da B_r e che, Per il Teorema 1.1, risulta $\widetilde{G}, \widetilde{g} \in L^p(B_r)$, con

$$\begin{aligned}\|\widetilde{G}, L^p(B_r)\| &\leq c_1\,(\|F; L^p(\Omega)\| + \|u; L^p(\Omega)\|)\,, \\ \|\widetilde{g}, L^p(B_r)\| &\leq c_1\,(\|F; L^p(\Omega)\| + \|u; L^p(\Omega)\|)\,.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Poiché sull'insieme $\overline{B_s}$ le funzioni u e v coincidono, sarà sufficiente provare la (1.4) per la funzione v.

Se indichiamo con Γ^0 la soluzione fondamentale dell'operatore L_0 la formula di rappresentazione del Teorema 3.1 si scrive semplicemente

$$v(z) = \sum_{j=1}^{m_0} \int \Gamma_j^0(w^{-1} \circ z)\widetilde{G}_j(w)dw - \int \Gamma^0(w^{-1} \circ z)\widetilde{g}(w)dw \equiv \sum_{j=1}^{m_0} v_j(z) - v_0(z).$$

Consideriamo uno degli integrali v_j nell'ultima somma. Risulta

$$\begin{aligned}
|v_j(z) - v_j(\zeta)| = &\left| \int \left(\Gamma_j^0(z^{-1} \circ w) - \Gamma_j^0(\zeta^{-1} \circ w)\right) \widetilde{G}_h(w)dw \right| \leq \\
&\int_{\|z^{-1}\circ w\| \leq M\|z^{-1}\circ\zeta\|} \left(\left|\Gamma_j^0(z^{-1} \circ w)\right| + \left|\Gamma_j^0(\zeta^{-1} \circ w)\right|\right) |\widetilde{G}_h(w)|dw + \\
&\int_{\|z^{-1}\circ w\| \geq M\|z^{-1}\circ\zeta\|} \left|\Gamma_j^0(z^{-1} \circ w) - \Gamma_j^0(\zeta^{-1} \circ w)\right| |\widetilde{G}_h(w)|dw \leq \\
&\text{(per la Proposizione 2.3 e per il Corollario 5.2)} \\
&c \int_{\|z^{-1}\circ w\| \leq M\|z^{-1}\circ\zeta\|} \|z^{-1} \circ w\|^{-(Q+1)} |\widetilde{G}_h(w)|dw + \\
&c \int_{\|\zeta^{-1}\circ w\| \leq c_0(M+1)\|z^{-1}\circ\zeta\|} \|\zeta^{-1} \circ w\|^{-(Q+1)} |\widetilde{G}_h(w)|dw + \\
&c \int_{\|z^{-1}\circ w\| \geq M\|z^{-1}\circ\zeta\|} \frac{\|\zeta^{-1} \circ z\|}{\|z^{-1} \circ w\|^{Q+2}} |\widetilde{G}_h(w)|dw.
\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder da questa segue immediatamente

$$|v_j(z) - v_j(\zeta)| \leq \widetilde{c}\, \|\widetilde{G}_j; L^p(\overline{B_r})\| \cdot \|\zeta^{-1} \circ z\|^{1-\frac{Q+2}{p}} \tag{5.2}$$

per $j = 1, \dots, m_0$, con $\widetilde{c}$ costante positiva che dipende solo dall'operatore L.

Con un ragionamento del tutto analogo, utilizzando q in luogo di p, dove $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{Q+2}$, si ottiene poi

$$|v_0(z) - v_0(\zeta)| \leq \widetilde{c}\, \|\widetilde{g}; L^q(\overline{B_r})\| \cdot \|\zeta^{-1} \circ z\|^{1-\frac{Q+2}{p}}.$$

Essendo $q < p$, da questa, dalla (5.2) e dalla (5.1) segue la prova del Teorema.

Bibliografia

[1] D. G. Aronson, J. Serrin, *Local behaviour of solutions of quasilinear parabolic equations,* Arch. Rational Mech. Anal. **25** (1967), 81–122.

[2] M. Bramanti, M. C. Cerutti, *$W_p^{1,2}$ solvibility for the Cauchy-Dirichlet problem for parabolic equations with VMO coefficients,* Comm. in Part. Diff. Eq. **18** (1993), 1735–1763.

[3] M. BRAMANTI, M. C. CERUTTI, M. MANFREDINI, *L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients,* in corso di stampa su Journal of Math. Anal. Appl.

[4] F. CHIARENZA, M. FRASCA, P. LONGO, *Interior $W_p^{1,2}$ estimates for non divergence elliptic equations with discontinuous coefficients,* Ric. Mat. **40** (1991), 149–168.

[5] G. DI FAZIO, *L^p estimates for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients,* in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.

[6] E. B. FABES, N. M. RIVIÈRE, *Singular integrals with mixed homogeneity,* Studia Math. **27** (1966), 19–38.

[7] E. LANCONELLI, S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators,* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **52,1** (1994), 29–63.

[8] M. MANFREDINI, *Il problema di Dirichlet per una classe di operatori ultraparabolici,* Seminario di Analisi Matematica, Università di Bologna. Tecnoprint, Bologna (A.A. 1994/95), 18–22.

[9] J. MOSER, *A Harnack inequality for parabolic differental equations,* Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 101–134, and correction in Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 231–236.

[10] J. NASH, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations,* American Journal of Mathematics **80** (1958), 931–954.

[11] S. POLIDORO, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type,* Le Matematiche **49** (1994), 53–105.

[12] ———, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations,* in corso di stampa su Arch. Rational Mech. Anal.

[13] ———, *Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov-Fokker-Planck equations,* in corso di stampa su Rendiconti di Matematica.

[14] L. P. ROTSCHILD, E. M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups,* Acta Math. **137** (1977), 247–320.

[15] E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.